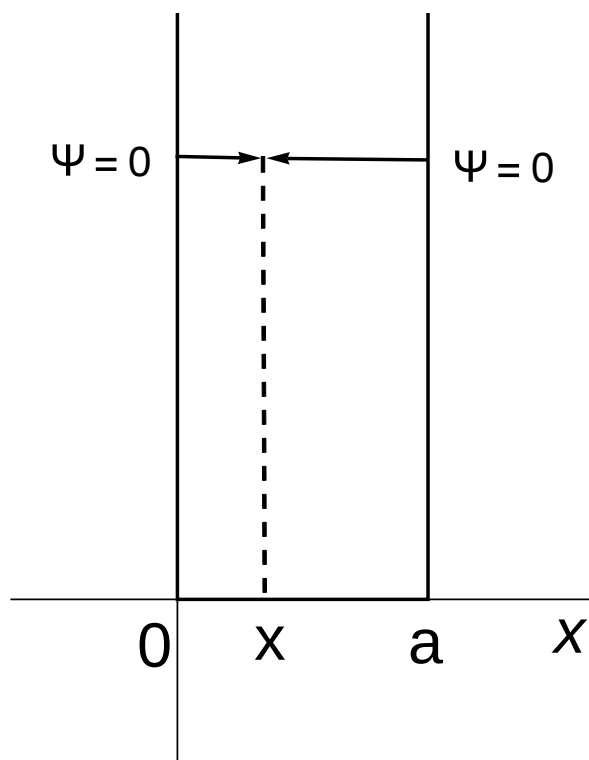


Рівні енергії частинки в одновимірній нескінченно глибокій прямокутній потенціальній ямі у квазикласичному наближенні (повтор з лекції № 15)



З урахуванням правил «зшивання» квазикласичних ХФ отримаємо

$$0 \rightarrow \frac{C}{\sqrt{p}} \sin \left[\underbrace{\frac{1}{\hbar} \int_0^x p dx}_{\alpha} \right] = \frac{C'}{\sqrt{p}} \sin \left[\underbrace{\frac{1}{\hbar} \int_x^a p dx}_{\beta} \right] \leftarrow 0;$$

$$C' = \pm C; \quad \alpha + \beta = \pi(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

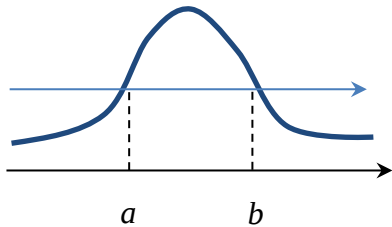
$$\int_0^a p dx = \pi \hbar (n+1); \quad p = \sqrt{2mE};$$

Квазикласичний результат для рівнів енергії частинки в нескінченно глибокій ямі збігся з точним:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 (n+1)^2}{2ma^2}.$$

Квазикласичне наближення: квазикласичний коефіцієнт прозорості бар'єра.

Формулу для коефіцієнта прозорості потенціального бар'єра в квазикласичному наближенні приводимо без виводу

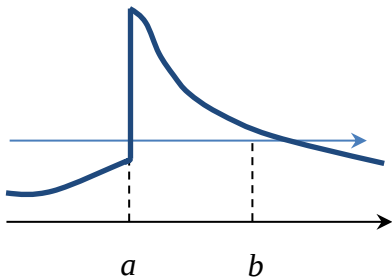


$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx\right). \quad (1)$$

Необхідна умова застосовності формули (1): $D \ll 1$, більш точна необхідна умова застосовності квазикласичного підходу:

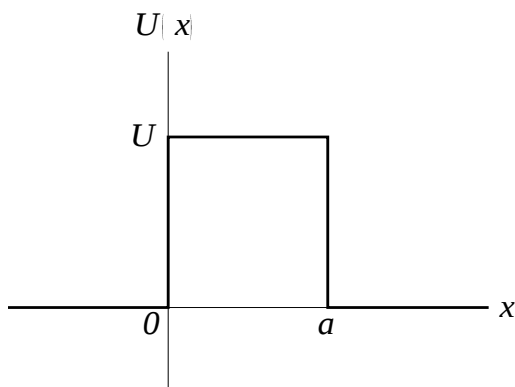
$$\left| \tilde{\lambda} \frac{dp}{dx} \right| \ll |p|, \quad |p(x)| = \sqrt{2m(U(x) - E)}; \quad \tilde{\lambda} = \frac{\hbar}{|p(x)|}.$$

Для бар'єра з однією або двома вертикальними стінками формула (1) застосовна лише по порядку величини точністю до множника перед експонентою



$$D \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx\right). \quad (2)$$

Наприклад, для прямокутного бар'єра ширини a висотою U_0 квазикласична оцінка по формулі (2) дає такий результат



$$D \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_0^a |p(x)| dx\right) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_0^a \sqrt{2m(U_0 - E)} dx\right);$$

$$D \sim \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m(U_0 - E)}a}{\hbar}\right). \quad (3)$$

Висота й ширина бар'єра повинні бути такими, щоб при $E \rightarrow +0$ виконувалася нерівність

$$\frac{2\sqrt{2mU_0}a}{\hbar} \gg 1; \quad \frac{mU_0a^2}{\hbar^2} \gg 1.$$

Тобто для «квазикласичності» потрібний досить високий та широкий бар'єр плюс важка частинка. Відкинули числові множники при виконанні оцінки по порядку величини. Якщо ця вимога виконана, то енергії, для яких коефіцієнт прозорості можна оцінювати в квазикласичному наближенні, повинні задовольняти нерівності

$$\frac{2\sqrt{2m(U_0 - E)}a}{\hbar} \gg 1; \quad E \ll U_0 - \frac{\hbar^2}{8ma^2}.$$

У лекції № 4 задача про проходження частинки через прямокутний бар'єр була вирішена точно й отримані наступні формули:

$$D = \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2 + \kappa^2}{2k\kappa}\right)^2 \operatorname{sh}^2 \kappa a}; \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}; \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (4)$$

Для слабо прозорого бар'єра $\kappa a \gg 1$, $\operatorname{sh} \kappa a \approx \frac{1}{2} e^{\kappa a}$, тому коефіцієнт прозорості

$$D \approx \frac{16k^2\kappa^2}{(k^2 + \kappa^2)^2} e^{-2\kappa a}. \quad (5)$$

Формули (3) і (5) збігаються з точністю до множника перед експонентою, який не враховується в наближеній квазикласичній формулі (2).

Теорія альфа-розпаду

Визначимо ймовірність виходу частинки (з рівним нулю кутовим моментом $l = 0$) із центрально-симетричної ями (α -розпад).

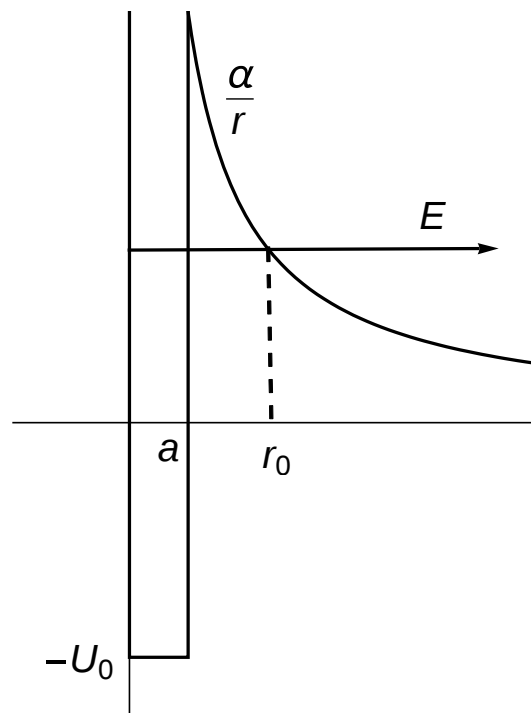
Побудуємо теорію альфа розпаду (Г.Гамов 1928 рік, Геттінген). Георгій Гамов застосував ідею про квантовомеханічне проникнення альфа-частинки, що утворилася у нестабільному ядрі, через кулонівський бар'єр (тунелювання) і показав, що частинки навіть із не дуже великою енергією можуть із певною

ймовірністю вилітати з ядра. Це було перше успішне пояснення поведінки радіоактивних елементів на основі квантової теорії.

Розглянемо потенціальну енергію наступного виду (див. рис. нижче)

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & 0 \leq r < r_0; \\ \frac{\alpha}{r}, & r > r_0. \end{cases} \quad (6)$$

Тут $\alpha = 2(Z - 2)e^2$, де Z – заряд ядра до альфа-розпаду, a – розмір ядра. Розмір атома визначається умовою $E = \alpha/r_0$. Відомо, що $a \ll r_0$.



Оцінімо за формулою (2) по порядку величини коефіцієнт прозорості бар'єра (6). Це й буде ймовірність альфа-розпаду. Маємо

$$\begin{aligned} D &\sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^{r_0} \sqrt{2m\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r_0}\right)} dr\right) = \exp\left[-\frac{2\sqrt{2m\alpha r_0}}{\hbar} \int_a^{r_0} \sqrt{\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)} d\left(\frac{r}{r_0}\right)\right] = \\ &= \left\{x = \frac{r}{r_0}\right\} = \exp\left[-\frac{2\sqrt{2m\alpha r_0}}{\hbar} \int_{a/r_0}^1 \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} dx\right] = \exp\left[-\frac{2\sqrt{2m\alpha r_0}}{\hbar} \cdot I\right] \end{aligned}$$

Обчислимо інтеграл I :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{a/r_0}^1 \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} dx = \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} x \Big|_{a/r_0}^1 + \frac{1}{2} \int_{a/r_0}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \\
&= -\left(\frac{r_0}{a} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{a}{r_0}\right) + \int_{a/r_0}^1 \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = -\sqrt{\frac{a}{r_0} \left(1 - \frac{a}{r_0}\right)} + \arcsin(\sqrt{x}) \Big|_{a/r_0}^1 = \\
&= \sqrt{\frac{a}{r_0} \left(1 - \frac{a}{r_0}\right)} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{r_0}}\right) + \frac{\pi}{2} \approx \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

У такому наближенні коефіцієнт прозорості

$$D \sim \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}}\right). \quad (7)$$

З урахуванням формули для нерелятивістської кінетичної енергії

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

формулу (7) можна записати у вигляді

$$D \sim \exp\left(-\frac{2\pi\alpha}{\hbar v}\right). \quad (8)$$

Умова застосовності оціночної формули (8) $\alpha/\hbar v \gg 1$.